Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner

John Napier (1550-1617).

Peter Haremoës
Niels Brock

July 27, 2010

1 Indledning

Eksponential- og logaritmefunktioner blev indført på Mat C nivea uden en præcis definition. Funktionerne blev indført og antoges at have visse egenskaber, men at der overhovedet findes sådanne funktioner blev blot taget for givet. Her vil vi give nogle mere præcise definitioner.

Logaritmefunktionerne blev indført af Napier in 1614 som brugte dem som et redskab til hurtigt at udregne rødder og multiplikationer. Napier var iøvrigt også den første, som brugte decimalkomma på en systematisk måde.

2 Defintion af logaritmefunktionen

Definition 1 *For $t \in]1;\infty[$ er den naturlige logaritme defineret ved som arealet under grafen for $\frac{1}{x}$ fra 1 til t. For $t = 1$ er den naturlige logaritme defineret til at være 0. For $t \in]0;1[$ er den naturlige logaritme defineret ved som minus arealet under grafen for $\frac{1}{x}$ fra t til 1.*

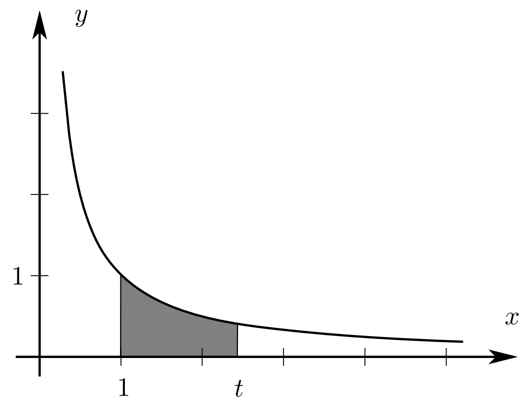

Figure 1: Arealet fra $x = 1$ til $x = t$ under $y = 1/x$ er markeret.

Sætning 2 *Den naturlige logaritmefunktion opfylder:*

1. *Hvis $f(x) = \ln(x)$ så er $f\ '(x) = 1/x$.*
2. *For $s, t > 0$ og et naturligt tal n gælder*

$$\ln(s \cdot t) = \ln(s) + \ln(t),$$
$$\ln\left(\frac{s}{t}\right) = \ln(s) - \ln(t),$$
$$\ln(t^n) = n \ln t.$$

3. Den naturlige logaritmefunktion er kontinuert og voksende.

4. Den naturlige logaritmefunktion er hverken begrænset opad eller nedad i den forstand at

$$\begin{aligned} \ln(t) &\to \infty \quad \textit{for } t \to \infty, \\ \ln(t) &\to -\infty \ \textit{for } t \to 0_+. \end{aligned}$$

5. Defitions- og værdimængde er givet ved $Dm(\ln) =]0;\infty[$ *og* $Vm(\ln) = \mathbb{R}$.

Bevis.

1. Dette kommer af at vi udregner den naturlige logaritme som et areal under funktionen $1/x$ Det præcise argument springer vi over her.

2. Den første ligning følger af nogle arealbetragtninger som vi ikke skal komme ind påher. Endvidere har vi

$$\ln(s) = \ln\left(\frac{s}{t} \cdot t\right) = \ln\left(\frac{s}{t}\right) + \ln(t)$$

   og dermed

$$\ln\left(\frac{s}{t}\right) = \ln(s) - \ln(t).$$

   Den sidste formel fås ved

$$\begin{aligned} \ln(t^n) &= \ln\left(\underbrace{t \cdot t \cdot \cdots \cdot t}_{n \text{ gange}}\right) \\ &= \underbrace{\ln(t) + \ln(t) + \cdots + \ln(t)}_{n \text{ gange}} \\ &= n \cdot \ln(t). \end{aligned}$$

3. Da den naturlige logaritme er differentiabel er den kontinuert. Da den afledte af ln er positiv er ln en voksende funktion.

4. Først viser vi at $\ln(t) \to \infty$ for $t \to \infty$. Funktionen er voksende, så det er tilstrækkeligt at vise, at logaritmefunktionen kan antage vilkårligt store værdier. Vi har $\ln(2^n) = n \cdot \ln 2$, så hvis n er stor er $\ln(2^n)$ stor. For værdier $t < 1$ benytter vi at $\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{1/t}\right) = \ln(1) - \ln(1/t) = -\ln(1/t)$. Den anden grænseværdi kan nu bestemmes ud fra at $1/t \to \infty$ for $t \to 0$.

5. Dette følger fra de foregående egenskaber.

■

Logaritmen med grundtal $a > 1$ kan nu defineres ud fra den naturlige logaritme ved

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Med denne definition ser vi at $\log_a(a) = 1$. Grundtallet for en logaritmefunktion er med andre ord det tal, hvis logaritme er 1. Hvis vi skal finde grundtallet for den naturlige logaritmefunktion skal vi derfor løse ligningen $\ln(t) = 1$ eller $\int_1^t x^{-1}\, dx = 1$. Løsningen til ligningen har navnet e og den omtrentlige værdi er 2.7183 .

Logaritmefunktionen med grundtal a er ligesom den naturlige logaritme kontinuert og voksende og opfylder de samme logaritmeregler. Den afledte af logaritmefunktionen med grundtal a er $\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$. Vi kan derfor sige at den naturlige logaritmefunktion er karakteriseret ved at den afledte i $x = 1$ er 1. Det approksimerende 1.-gradspolynomium nær 1 er derfor givet ved

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1) + 1\cdot(x-1)\\ &= x-1.\end{aligned}$$

En tilnærmet værdi for e kan vi bestemme ved følgende udregning:

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) &= n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\approx n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Derfor er e cirka lig med $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ og denne approksimation bliver bedre jo større n vælges. Der gælder med andre ord at $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ for $n \to \infty$.

3 Eksponentialfunktioner

Vi starter med den naturlige eksponentialfunktion.

Definition 3 *Den naturlige eksponentialfunktion er defineret som den inverse funktion til den naturlige logaritmefunktion. Den naturlige eksponentialfunktion betegnes* $\exp$.

Denne defition giver naturligvis kun mening hvis den naturlige logaritmefunktion har en invers funktion, men det bliver netop sikret ved egenskaberne 1-5 for den naturlige logaritmefunktion.

Sætning 4 *Den naturlige eksponentialfunktion opfylder*

1. *Hvis* $f(x) = \exp(x)$ *så er* $f'(x) = \exp(x)$.
2. *For reelle tal* x *og* y *og et naturligt tal* n *gælder:*

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp(x)\cdot\exp(y)\\ \exp(x-y) &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)}\\ \exp(nx) &= (\exp(x))^n .\end{aligned}$$

3. *Den naturlige eksponentialfunktion er kontinuert og voksende.*
4. *Den naturlige eksponentialfunktion opfylder*

$$\begin{aligned}\exp(x) &\to \infty \text{ for } x \to +\infty,\\ \exp(x) &\to 0 \text{ for } x \to -\infty.\end{aligned}$$

5. *Definitions- og værdimængde er givet ved* $Dm(\exp) = \mathbb{R}$ *og* $Vm(\exp) =]0;\infty[$.

Bevis. Disse egenskaber bevises ved at oversætte de tilsvarende resultater for den naturlige logaritmefunktion til resultater for den inverse funktion. Egenskab 1. er den eneste som kræver lidt mere arbejde. Da er

$$x = \ln(\exp(x)).$$

Vi differentierer på begge sider af lighedstegnet og får

$$\begin{aligned} 1 &= \ln'(\exp(x)) \cdot \exp'(x) \\ &= \frac{1}{\exp(x)} \exp'(x). \end{aligned}$$

Resultatet fås ved at gange med $\exp(x)$ på begge sider af lighedstegnet. ■

Eksponentialfunktionen med grundtal a definerer vi som den inverse funktion til logaritmefunktionen med grundtal a. For at finde et pænt udtryk for eksponentialfunktionen med grundtal a løser vi ligningen

$$\log_a(y) = x.$$

Da $\log_a(y) = \ln(y) / \ln(a)$ får vi

$$\ln(y) = x \ln(a)$$

og dermed

$$y = \exp(x \ln(a)).$$

Funktionen, som afbilder x over i $\exp(x \ln a)$, er således eksponentialfunktionen med grundtal a. Hvis x er et naturligt tal har vi

$$y = \exp(x \ln a) = \exp(\ln a^x) = a^x.$$

Hvis x ikke er et naturligt tal kan vi bruge

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

som betegnelse for eksponentialfunktionen med grundtal a. Vi ser nu at

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x),$$

så e^x er en kortere måde at skrive den naturlige eksponentialfunktion.

Sætning 5 *Eksponentialfunktionen med grundtal* $a > 0$ *opfylder*

1. *Hvis* $f(x) = a^x$ *så er* $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

2. *For reelle tal* x *og* y *og et positivt tal* b *gælder potensreglerne*

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ (ab)^x &= a^x b^x \\ \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\ (a^x)^y &= a^{xy}. \end{aligned}$$

3. *Eksponentialfunktioner er kontinuerte. De er voksende hvis $a > 1$, aftagende hvis $a < 1$ og konstant hvis $a = 1$.*

4. *Hvis $a > 1$, så gælder*

$$a^x \to \infty \text{ for } x \to +\infty,$$
$$a^x \to 0 \text{ for } x \to -\infty.$$

Hvis $a < 1$, så gælder

$$a^x \to 0 \text{ for } x \to +\infty,$$
$$a^x \to \infty \text{ for } x \to -\infty.$$

5. *Definitions- og værdimængde er givet ved $Dm(\exp) = \mathbb{R}$ og hvis $a \neq 1$ så er $Vm(\exp) =]0; \infty[$.*

4 Potens og rod

For $a \in \mathbb{R}$ er potensfunktionen $x^a, x > 0$ defineret som $x^a = e^{a \ln x}$. Den kan nu differentieres som en sammensat funktion, hvilket giver

$$e^{a \ln x} \cdot a\frac{1}{x} = x^a \cdot a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Vi kan udregne den inverse til en potensfunktion. Vi har

$$y = x^a \iff (y)^{1/a} = (x^a)^{1/a} = x^{a \cdot 1/a} = x^1 = x.$$

Den inverse funktion til x^a er derfor $x^{1/a}$ og dermed selv en potensfunktion. Hvis a er et heltal er der dog en særlig skrivemåde for $x^{1/a}$ som er $\sqrt[a]{x}$. Det vil sige at kvadratrødder, kubikrødder osv. blot er potenser i forklædning. Den antikverede skrivemåde $\sqrt[a]{x}$ er måske dekorativ men er iøvrigt ret upraktisk.

Potensreglerne gælder altid så længe grundtallet er positivt. Der findes desværre ingen måde generelt at definere potenser af negative tal således at potensreglerne bliver ved med at gælde.